مقادیر بهینه کارمزد و سهم سپرده‌ها در بانکداری اسلامی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۶/۱۸ تاریخ تأیید: ۱۳۹۵/۱۲/۱۳

یعقوب محمودیان* اصغر ابوالحسنی هستیانی**
محمدحسین پورکاظمی* کامران ندری******

چکیده

بررسی عمل‌کرد نظام بانکی در قالب مدل‌های دقیق و منسجم ریاضی به ما این امکان را می‌دهد که برداشت دقیق‌تری از عمل‌کرد نظام بانکی و اظهارنظرهای تخصصی‌تری در این زمینه داشته باشیم. پرسش مهمی که در این زمینه مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان با وجود پیچیدگی‌های فنی و حقوقی در الگوی اسلامی تجهیز منابع، آن را با استفاده از روش‌های بهینه‌یابی پویای تصادفی، مدل‌سازی نمود؟

پژوهش پیش رو با این فرضیه که می‌توان با وجود پیچیدگی موجود در الگوی اسلامی، آن را در قالب یک مدل ریاضی پویای تصادفی بیان نمود، در نظر دارد با واردکردن نظریه‌های بانکداری اسلامی در تابع هدف و قیود مسئله بهینه‌سازی در تجهیز منابع یک بانک اسلامی، برای نخستین‌بار گامی در راستای توسعه مدل‌های کمی در این زمینه بردارد.

واژگان کلیدی: *تجهیز منابع، کارمزد، حق‌الوکاله، بهینه‌یابی تصادفی.*

طبقه‌بندی JEL: G34, G21, E42.

*. عضو هیئت علمی اقتصاد دانشگاه پیام نور (نویسنده مسئول). Email: mahmodian61@gmail.com.

**. دانشیار اقتصاد دانشگاه پیام نور. Email: abolhasani@pnu.ac.ir.

***. دانشیار دانشگاه شهید بهشتی. Email: h_pourkazemi@yahoo.com.au.

****. استادیار اقتصاد دانشگاه امام صادق ؑ. Email: k.nadri@gmail.com.

مقدمه

بررسی چالش‌ها و مشکل‌های اجرایی بانکداری اسلامی نشان از باور پژوهشگران به عدم کامیابی کامل بانکداری اسلامی در مقام اجرا دارد. در ایران هم پس از تحول اساسی در نظام بانکی و اجرای نظام بانکداری بدون ربا در سال ۱۳۶۳ گروهی از پژوهشگران بر این باورند که پس از گذشت بیش از ۳۳ سال، اجرای بانکداری اسلامی به شکل کامل کامیاب نبوده و با چالش‌ها و مشکلاتی همراه است؛ ولی همین پژوهشگران درباره اینکه این چالش‌ها بیشتر مربوط به کدام قسمت از فرایند عملیات بانکی می‌شود و چگونه می‌توان آنها را برطرف کرد اختلاف‌نظر دارند. نکته قابل توجه درباره پژوهش‌های صورت‌گرفته در این‌باره این است که در بیشتر موارد، این ارزیابی عمل‌کرد به صورت توصیفی انجام شده و تاکنون هیچ مدل‌سازی ریاضی کاملی در این‌باره صورت نگرفته است.

بررسی عمل‌کرد نظام بانکی در قالب مدل‌های دقیق و منسجم ریاضی به ما این امکان را می‌دهد که برداشت دقیق‌تری از عمل‌کرد نظام بانکی و اظهارنظرهای تخصصی‌تری در این زمینه داشته باشیم. با توجه به ماهیت تصادفی متغیرهای مهم بانکی مانند تسهیلات و سپرده ـ به دلیل اینکه بخشی از تغییرات آنها قابل پیش‌بینی بوده و بخشی دیگر تابع شرایط اقتصاد کلان می‌باشد که ماهیت تصادفی داشته و غیر قابل پیش‌بینی می‌باشد ـ به نظر می‌رسد مدل‌های تصادفی ریاضی در این زمینه دارای دقت و تطابق بیشتری می‌باشند. ازآنجاکه ادبیات ریاضی در مدل‌های بهینه‌یابی تصادفی شامل مشتقات جزئی و معادلات دیفرانسیل تصادفی پیچیده می‌باشد، پژوهش‌های زیادی در این زمینه صورت نگرفته و این نوع مدل‌سازی کمتر مورد اقبال پژوهشگران قرار گرفته است.

پرسش مهمی که در زمینه مدل‌سازی در حیطه بانکداری اسلامی مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان با وجود پیچیدگی‌های فنی و حقوقی در بانکداری اسلامی، آن را با استفاده از روش‌های بهینه‌یابی پویای تصادفی (Dynamic Stochastic Optimization) مدل‌سازی نمود؟ این پژوهش با این فرضیه که می‌توان با وجود پیچیدگی موجود در الگوی اسلامی، آن را در قالب یک مدل ریاضی پویای تصادفی بیان نمود، در نظر دارد با واردکردن نظریه‌های بانکداری اسلامی در تابع هدف و قیود مسئله بهینه‌سازی در تجهیز منابع یک بانک اسلامی، برای نخستین‌بار گامی در راستای توسعه مدل‌های کمی در این

زمینه بردارد. طراحی مدل پیش رو، این امکان را می‌دهد که بتوانیم پس از اجرای الگوی پیشنهادی، ارزیابی دقیق‌تری از آن داشته باشیم و بتوانیم با زبان ریاضی این الگو را در مجامع بین‌المللی ارائه و از آن دفاع نماییم؛ چراکه باور نویسندگان قویاً بر این است که این الگو قابلیت ارائه در کشورهای غیر اسلامی را نیز دارد و می‌تواند با الگوهای رقیب در مقام اجرا و سودآوری رقابت نماید.

پیشینه تحقیق

کیایی و دیگران (۱۳۹۲) در مقاله «مقایسه عمل‌کرد بهینه در بانکداری اسلامی و بانکداری متعارف: استفاده از فرایند تصادفی پرش- انتشار» به بررسی رفتار بانک در قالب یک مدل بهینه‌یابی تصادفی پویا پرداخته‌اند؛ این مقاله که برگرفته از رساله دکتری ایشان می‌باشد، تقریباً جزو نخستین پژوهش‌هایی است که در زمینه مدل‌سازی تصادفی در حوزه بانکی صورت گرفته است. در این مقاله، مسئله بهینه‌یابی تصادفی پویا برای یک بانک متعارف ـ مبتنی بر بهره ـ به صورت رابطه یک تعریف شده است:

$$\max_{D_t}\ V(t,L_t)=\int_0^T e^{-\beta t}(r^L L_t + r^T T_t - r^D D_t -(a_0+a_1D_t+a_2D_t^2+b_1L_t+b_2L_t^2))dt$$
$$s.t.\ \ dL_t=(C_t+D_t-T_t-R_t)dt+\sigma_t L_t dW_t - v_t L_t dP_t \qquad (۱)$$

در این مسئله میزان سپرده به عنوان متغیر کنترل (Control Variable) و میزان تسهیلات پرداختی به عنوان متغیر وضعیت (State Variable) است. برای حل این مسئله تصادفی از روش هامیلتون ـ ژاکوبی ـ بلمن (Hamilton-Jacobi-Belman) استفاده شده و با استفاده از این روش مسیر بهینه متغیرهای کنترل و وضعیت استخراج شده است. *کیایی* برای حل معادله دیفرانسیل تصادفی متغیر وضعیت از روش شبیه‌سازی اولر- ماریویاما (Euler-Maruyama (EM) Simulations method) استفاده کرده و سرانجام با ایجاد سه تغییر اساسی مسئله بهینه‌یابی تصادفی برای یک بانک اسلامی را ارائه می‌کند؛ این سه تغییر شامل اضافه‌نمودن تابع پایانی به مسئله، تقسیم وام‌های اعطایی به دو دسته مبادله‌ای و مشارکتی و حذف سرمایه از ترازنامه بانک می‌باشد.

موسویان و دیگران (۱۳۹۳) هم در مقاله «تعیین سهم بهینه عقدهای مبادله‌ای و مشارکتی در بانکداری بدون ربا» به بررسی رفتار بانک در قالب مدل بهینه‌یابی تصادفی پویا پرداخته‌اند. با توجه به غیر قطعی‌بودن سود سپرده‌ها و عدم قطعیت در سود عقدهای مشارکتی در بانکداری بدون ربا بحث حساب تصادفی در ریاضیات، کاربرد فراوانی در مدل‌سازی رفتار بانک دارد؛ ازاین‌رو در مقاله پیش رو با استفاده از تکنیک کنترل بهینه تصادفی، رفتار بانک بدون ربا در قالب تابع هدف بررسی شده است و سهمی از عقدهای مبادله‌ای و مشارکتی که عایدی بانک اسلامی را حداکثر می‌کند در قالب یک الگوی نظری مشخص شده است. در این پژوهش از یک تابع منفعت برای مدل استفاده شده است که تابعی است از سه نوع سپرده قرض‌الحسنه، سرمایه‌گذاری و پس‌انداز. قید بودجه و درآمد بانک در این پژوهش نیز مطابق قانون بانکداری بدون ربا از راه انواع سپرده‌گذاری‌های تصریح‌شده در قانون به اضافه درآمد ناشی از خدمات بانکی است. با توجه به مطالب فوق مسئله بهینه‌یابی پژوهش به صورت رابطه دو ارائه شده است:

$$\underset{F,\theta}{Max}\, E_0\left[\int_0^T u\big(F(t)\big)dt\right]$$

$$\begin{aligned} dG(t) = {} & \big[\big(\theta(t)\mu G(t)\big)dt + \theta(t)\sigma G(t)dw(t)\big] \\ & + r\big(1-\theta(t)\big)G(t) + y(t)d(t) - \rho F(t) \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن $F(t)$ کل سپرده‌ها، $\theta(t)$ سهم تسهیلات مشارکتی از کل تسهیلات، $G(t)$ کل سپرده به غیر از سپرده قرض‌الحسنه (سپرده انتفاعی)، μ نرخ انتظاری سود تسهیلات مشارکتی، σ ریسک ناشی از عقدهای مشارکتی، $w(t)$ حرکت براونی (Browni Motion) (بخش تصادفی تغییرات)، r نرخ تسهیلات مبادله‌ای، ρ نرخ انتظاری پرداختی بانک به سپرده‌گذاران و $y(t)$ درآمد ناشی از خدمات بانکی است.

موسویان و همکاران با استفاده از روش هامیلتون ـ ژاکوبی ـ بلمن به این نتیجه رسیدند که میان نرخ سود عقدهای مبادله‌ای و سهم این عقدها در سبد تسهیلات بانک رابطه مستقیم و بین نرخ انتظاری سود تسهیلات مشارکتی و سهم این عقدها در سبد تسهیلات هم رابطه مثبت وجود دارد و سرانجام اینکه میان ریسک عقدهای مشارکتی و سهم این عقدها در سبد تسهیلات رابطه منفی وجود دارد. در این مقاله سرانجام به بررسی سهم بهینه

عقدهای مبادله‌ای و مشارکتی نسبت به تغییرهای نرخ عقدهای مبادله‌ای و نرخ انتظاری عقدهای مشارکتی پرداخته و سهم بهینه عقدها در سبد تسهیلات بانک نسبت به تغییر نرخ سود این عقدها و کشش سهم بهینه عقدها نسبت به تغییر نرخ سود آنها را بررسی کرده است.

بلک و *شولز* (Black and Scholes, 1973) در مقاله «قیمت‌گذاری اختیارات و بدهی‌های شرکتی» تئوری قیمت‌گذاری اختیار معامله در بازار سهام را مطرح کردند. آنها قیمت سهام را در قالب معادله دیفرانسیل تصادفی حرکت براونی هندسی مدل‌سازی کردند. این مدل بیشترین کاربرد را در مهندسی مالی دارد. مدل *بلک* و *شولز* برای یک سبد دارایی طراحی شده است که شامل دو نوع دارایی بدون ریسک با قیمت $B(t)$ و ریسکی با قیمت $S(t)$ می‌باشد که در آن به منظور حداکثر نمودن تابع هدف (سود)، مسیر بهینه $S(t)$ را به صورت رابطه سه به دست می‌آورد.

$$dS(t) = S(t)[\mu dt + \sigma dw(t)] \quad (۳)$$

که در آن μ بیانگر میزان بازدهی ثابت سهام و σ بیانگر نوسانات قیمت سهام می‌باشد.

مرتون (Merton, 1973) هم همزمان با *بلک* و *شولز* در مقاله خود با عنوان «نظریه عقلایی قیمت‌گذاری اختیارات» قیمت سهام را بر اساس معادله دیفرانسیل تصادفی با حرکت براونی هندسی مدل‌سازی کرده است.

موکودم پترسن و پترسن (Mukuddem-Petersen & Petersen, 2006) در مقاله خود با عنوان «مدیریت بانک از طریق کنترل بهینه تصادفی» از مدل بهینه‌یابی پویای تصادفی به منظور بهینه‌سازی رفتار بانک استفاده نموده‌اند. ایشان از این روش برای حداقل‌کردن ریسک بازار و ریسک کفایت سرمایه بانک استفاده کرده‌اند و یک سبد بهینه برای وام‌های اعطایی بانک پیشنهاد داده‌اند. برای این کار از رابطه ترازنامه‌ای یک بانک متعارف به صورت رابطه چهار استفاده شده است:

$$R(t) + L(t) + S(t) = D(t) + B(t) + C(t) \quad (٤)$$

که سمت چپ آن بیانگر دارایی و سمت راست آن بیانگر بدهی ترازنامه‌ای بانک است. با تعریف هر یک از اجزای این معادله ترازنامه‌ای به صورت یک رابطه مشخص و در قالب این هدف که باید ریسک بازار و ریسک کفایت سرمایه (Capital Adequacy Risk) حداقل شود، آنها مسیر بهینه اعطای وام و میزان سرمایه را به صورت رابطه پنج تعریف نموده‌اند.

$$dL(t) = L(t)[(r^L(t) - c^L)dt + \sigma_t(t)dw(t)]$$
$$dC(t) = c(t)dt + \sigma_c dw_c(t) \qquad (۵)$$

سیگاوک و دیگران (Sigauke & et al., 2012) در مقاله «مدل‌سازی مدیریت نقدینگی بانک‌های تجاری با استفاده از برنامه‌ریزی تصادفی» مدلی برای مدیریت نقدینگی ارائه نموده‌اند که ترکیبی یکپارچه از دارایی‌های مختلف را به‌طور مطلوب و کارآمد در خود جای داده است. به‌کارگیری این مدل به تصمیم‌گیری‌های بهتر در مورد نقدینگی منجر می‌شود؛ نقش عدم قطعیت و کمی‌سازی ریسک در این مدل در نظر گرفته شده است.

مقاله پیش رو نسبت به مقالات قبلی انجام‌شده در این زمینه دارای نوآوری‌هایی می‌باشد که مهم‌ترین آنها موارد زیر می‌باشد:

- بیشتر ادبیات موجود در زمینه بانکداری اسلامی به صورت توصیفی می‌باشد و استفاده از مدل‌های بهینه‌یابی تصادفی در این زمینه بسیار محدود و نادر می‌باشد؛ به‌نحوی‌که در مطالعات داخلی مواردی که با استفاده از مدل‌های بهینه‌یابی ریاضی به ارزیابی بانکداری اسلامی پرداخته شده باشد به کمتر از انگشتان یک دست می‌رسد؛ به همین دلیل وجود مقالاتی مانند مقاله پیش رو سبب هرچه پربارترشدن ادبیات کمّی داخلی در زمینه بانکداری اسلامی می‌شود.
- برای نخستین‌بار است ـ چه در مطالعات داخلی و چه خارجی ـ که مقاله‌ای به‌طور تخصصی، تجهیز منابع بانک را با بیان دقیق جزئیات ـ انواع مختلف سپرده و نحوه به‌کارگیری آنها ـ و با نگاه عملیاتی با استفاده از دقیق‌ترین و بروزترین ابزار ریاضی یعنی مدل‌های بهینه‌یابی پویای تصادفی، مدل‌سازی نموده است.

- در مطالعات مشابه خارجی عمل‌کرد یک بانک مبتنی بر بهره مدل‌سازی شده است و الزامات شرعی مورد نظر اسلام در مدل وارد نشده است. مطالعات محدود داخلی صورت‌پذیرفته در این زمینه هم زیاد وارد جزئیات مسائل بانکداری اسلامی نشده‌اند و به‌طورکلی تنها نظام فعلی بانکداری بدون ربا را مدل‌سازی نموده‌اند. این در حالی است که مقاله پیش رو با لحاظ‌نمودن تمامی الزامات قانونی و شرعی در مدل، الگویی را مدل‌سازی نموده است که تا اندازه ممکن مشکلات کنونی بانکداری بدون ربا در آن برطرف شده و قابلیت رقابت با الگوهای مبتنی بر بهره را هم داشته باشد.
- بر خلاف مدل‌های قبلی که بسیط و ساده طراحی شده‌اند و تنها دارای یک متغیر کنترل و یک متغیر وضعیت می‌باشند، مدل استفاده‌شده در این مقاله دارای سه متغیر کنترل و سه متغیر وضعیت می‌باشد. تعدد متغیرها در مدل به دلیل وجود عقود متعدد و وجود الزامات شرعی و قانونی موجود در نظام بانکی ایران می‌باشد. طراحی یک مدل بهینه‌یابی پویای تصادفی ـ چه در حوزه بانک و چه در دیگر حوزه‌های اقتصادی ـ که دارای همزمان سه متغیر کنترل و سه متغیر وضعیت باشد و مقادیر بهینه آنها هم استخراج شده باشد تاکنون در ادبیات داخلی سابقه نداشته و این مقاله می‌تواند در این زمینه منبع بسیاری از مقالات دیگر باشد.

مبانی نظری

بهینه‌یابی در تحلیل‌های اقتصادی موضوع مهم و برجسته‌ای است و در بیشتر تکنیک‌های جدید برنامه‌ریزی ریاضی جایگاه مهمی دارد. در مسئله بهینه‌یابی پویا این پرسش مطرح می‌شود که مقدار بهینه متغیر انتخابی برای هر دوره زمانی در طول دوره برنامه‌ریزی (حالت زمان گسسته) یا در هر نقطه از یک فاصله زمانی معین، مثلاً $[0,T]$ (حالت زمان پیوسته) چقدر است؟ پاسخ مسئله بهینه پویا به ازای هر متغیر انتخابی به شکل یک مسیر زمانی بهینه خواهد بود که بهترین مقدار این متغیر را تا پایان دوره برنامه‌ریزی مشخص می‌کند (چیانگ، ۱۳۸۷، ص۳).

در نظریه کنترل بهینه، مسئله بهینه‌یابی به جای دو متغیر، دارای سه نوع متغیر است؛ یعنی علاوه بر متغیر زمان t و متغیر وضعیت $x(t)$ متغیر کنترل $u(t)$ نیز مورد توجه قرار

گرفته است؛ در واقع همین متغیر سوم است که عنوان کنترل را به این مسئله داده است و در حل مسئله بهینه‌یابی نقش اساسی دارد. مسئله کنترل، گسترش مدرن حساب تغییرات می‌باشد. مهم‌ترین هدف نظریه کنترل بهینه، تعیین مسیر زمانی بهینه برای متغیر کنترل است؛ البته هنگامی که مسیر متغیر کنترل بهینه شد می‌توان مسیر بهینه متغیر وضعیت را نیز پیدا نمود؛ بنابراین حضور متغیر کنترل به عنوان بازیگر اصلی، جهت‌دهی اساسی مسئله بهینه‌یابی پویا را تغییر می‌دهد (پورکاظمی، ۱۳۹۳، ص۲٤٤).

بیان صوری مسئله کنترل بهینه

در مسئله کنترل بهینه پویا عوامل زیر وجود دارد (همان، ص۲۸):

۱. متغیر زمان: این متغیر را که به‌طور پیوسته در فاصله $t_0 \le t \le T$ تغییر می‌کند به t نشان می‌دهیم؛ t_0 زمان اولیه و T زمان انتهایی است.

۲. متغیر وضعیت: این متغیر را به صورت $X(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t))$ نشان داده که در آن $x_i(t)$، $i = 1$ تا n تابعی پیوسته از زمان است.

۳. فضای ممکن: متغیر وضعیت X به یک فضای ممکن تعلق دارد که آن را با A نشان می‌دهیم، $A \subset R^n$ و $X \in A$.

٤. متغیر کنترل: متغیری است که به وسیله آن بر متغیر وضعیت اثر می‌گذاریم؛ این متغیر را به صورت $U(u_1(t), u_2(t), \dots u_m(t))$ نشان می‌دهیم.

۵. معادله حرکت (Motion Equitioan): اگر X(t) متغیر وضعیت و U(t) متغیر کنترل باشد، رابطه میان متغیر وضعیت و متغیر کنترل به صورت رابطه برداری زیر است؛ $\dot{X}$ مشتق بردار X(t) بر حسب t می‌باشد.

$$\dot{X}(t) = f\big(t.U(t), X(t)\big)$$

٦. تابعی هدف (Objective Function): در مسئله کنترل، تابعی هدف به صورت زیر است:

$$V[U] = \int_{t_0}^{T} I\big(t, X(t), U(t)\big)dt + F(X(T), T)$$

انتگرالده I موسوم به تابع میانی (Intermediate Function) و تابع F موسوم به تابع انتهایی (Final Function) است.

۷. مسئله کنترل: مسئله عبارت است از تعیین متغیر کنترل بهینه $U^*(t)$ و به واسطه آن تعیین متغیر وضعیت بهینه $X^*(t)$ است تا تابعی هدف نسبت به معادله حرکت، بیشینه یا کمینه باشد؛ یعنی داریم:

$$Max \text{ یا } Min \quad V[U] = \int_{t_0}^{T} I\big(t, X(t), U(t)\big)dt + F(X(T), T)$$
$$s.t. \qquad \dot{X}(t) = f\big(t. U(t), X(t)\big)$$

مسئله کنترل اگر به صورت معادله بالا باشد، مسئله کنترل بولزا (Bolza) نامیده می‌شود (اینتریلیگیتور، ۱۳۸۷، ص۱۸۵).

تعریف مسئله کنترل بهینه تصادفی

اگر در مسئله کنترل بولزا متغیرهای ما از جمله متغیر وضعیت $x(t)$ و یا متغیر کنترل $u(t)$ متغیرهای تصادفی باشند، ما با مسئله کنترل تصادفی روبه‌رو هستیم که به صورت زیر بیان می‌شود:

فرض می‌کنیم S فضای نمونه و F ساختار اطلاعاتی و F_t ساختار اطلاعاتی فیلترشده و P اندازه احتمال باشد. در فضای احتمالی (S, F, F_t, P)، $x(t)$ فرایند تصادفی و $w(t)$ حرکت براونی استاندارد است. مسئله‌ای به صورت رابطه شش یک مسئله کنترل تصادفی است:

$$Max \;\; Z = E\left[\int_{t_0}^{T} I(t, x, u)dt + F(x(T), T)\right]$$
$$s.t. \;\; dx = f(t. x, u)dt + \sigma(t. x, u)dw \qquad (٦)$$
$$x(t_0) = x_0$$
$$z\big(T, x(T)\big) = F(x(T), T)$$

در رابطه بالا $x(t)$ متغیر وضعیت، $u(t)$ متغیر کنترل و $w(t)$ فرایند براونی هستند (Bertsekas, 2003, p.49).

حل مسئله کنترل بهینه تصادفی

اساس حل مسئله کنترل بهینه غیر تصادفی مبتنی بر معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. سه روش حساب تغییرات، اصل ماکزیمم و برنامه‌ریزی پویا (معادله بلمن) برای حل مسئله

کنترل وجود دارد که از میان این سه روش، تنها روش سوم یعنی برنامه‌ریزی پویا و معادله بلمن قابل استفاده برای حل مسائل کنترل بهینه تصادفی می‌باشد؛ بنابراین برای حل این‌گونه مسائل از معادله بلمن استفاده می‌شود (پورکاظمی، ۱۳۹۳، ص۳۷۳).

برای به‌دست‌آوردن معادله بلمن از اصل بهینگی استفاده نموده و بر اساس این اصل اگر نقطه شروع را هر نقطه‌ای جز (x_0, t_0) نیز در نظر بگیریم، مسیر باقیمانده هم با انتخاب مثلاً $(x_0 + \Delta x, t_0 + \Delta t)$ به عنوان نقطه شروع، باز این مسیر بهینه است. با استفاده از این اصل و محاسبه مشتقات جزئی و دیفرانسیل متغیر وضعیت یعنی dx و ساده‌سازی ـ مانند حذف جملات شامل dw چرا که $E[dw]$ برابر صفر است ـ به معادله اساسی برای حل مسائل کنترل بهینه تصادفی می‌رسیم که موسوم به معادله تصادفی بلمن است که به صورت زیر نمایش داده می‌شود (Bertsekas, 2003, p.55):

$$-z_t(t,x) = \underset{u}{Max}\left[I(t,x,u) + z_x(t,x)f(t.x,u) + \frac{1}{2}\sigma^2 z_{XX}(t,x)\right] \qquad (۷)$$

مدل بهینه‌یابی پویای تصادفی تجهیز منابع در بانکداری اسلامی

در این قسمت از پژوهش به ارائه مدل بهینه‌یابی پویای تصادفی تجهیز منابع در بانکداری اسلامی می‌پردازیم؛ بر این مبنا که می‌توان یک مدل بهینه‌یابی پویای تصادفی برای توضیح عمل‌کرد یک بانک اسلامی در بخش تجهیز منابع ارائه نمود؛ به‌نحوی‌که از طریق آن بتوان مسیر بهینه تجهیز منابع را در هر لحظه از زمان مشخص و عمل‌کرد بانک را منطبق با آن تنظیم نمود. مدلی که در ادامه به بیان آن می‌پردازیم تاکنون در ادبیات داخلی مطرح نشده و دارای نوآوری‌های ویژه خود می‌باشد؛ به‌نحوی‌که قابلیت تبیین عمل‌کرد یک بانک اسلامی در بخش تجهیز منابع را با حداکثر دقت داشته باشد.

فروض به‌کارگرفته‌شده در مدل پیشنهادی

فرض نخست: الگوی مورد استفاده در تجهیز منابع از الگوی تفکیک در وظایف بانک پیروی می‌کند. *میرجلیلی* (۱۳۸۳)، *داوودی و صمصامی* (۱۳۸۷)، *داوودی و بیدار* (۱۳۹۰) و *محققنیا* (۱۳۹۲ و ۱۳۹۳) به این منظور دو بخش پولی و سرمایه‌ای بانکداری را از هم جدا کرده و برای هر کدام الگو و عمل‌کرد متناسب با آن بخش را پیشنهاد کرده‌اند. به منظور

فراهم‌نمودن سپرده‌گذاری برای همه سلایق و انگیزه‌های مشتریان در یک مجموعه مالی واحد به نام بانک، طراحی این دو بخش به نوعی صورت می‌پذیرد که در یک مجموعه واحد به نام بانک قابل اجرا باشد.

فرض دوم: بر اساس الگوی تفکیک شش نوع سپرده با کارکردهای ویژه خود جهت پوشش همه نیازها و سلایق مشتریان طراحی شده است که در ادامه به بیان مختصر ویژگی‌های هر یک از آنها می‌پردازیم:

۱. **سپرده جاری:** با اقتباس از الگوی بانکداری محدود و بانکداری دوباجه‌ای، این سپرده دارای ماهیت قرض بوده و هیچ‌گونه سودی به آن تعلق نمی‌گیرد و تمامی مانده آن جهت کنترل پول‌آفرینی بانک‌ها ذخیره می‌شود (Bossone, 2002/ Ahmad, 1997/ Khan, 1986/ Khan & Mirakhor, 1987) (داوودی و محقق‌نیا، ۱۳۸۷).

۲. **سپرده پس‌انداز:** این سپرده بر اساس وکالت در قرض شکل می‌گیرد و هدف از طراحی آن احیای سنت قرض‌الحسنه می‌باشد و بانک ملزم است تمامی وجوه ناشی از این نوع سپرده را صرف تسهیلات قرض نماید و در قبال انجام این خدمت کارمزد خود را دریافت می‌کند.

۳. **سپرده سرمایه‌گذاری وکالت در عقود با بازدهی ثابت:** منابع حاصل از این نوع سپرده‌ها در بخش تخصیص منابع توسط عقود با بازدهی ثابت به کار گرفته می‌شوند و دارای بازدهی انتظاری معینی هستند و سود مورد انتظار با سود تحقق‌یافته خیلی با هم تفاوت ندارند؛ مانند مرابحه، فروش اقساطی، خرید دین، سلف، اجاره به شرط تملیک و جعاله؛ برای این نوع از سپرده اوراق صادر نمی‌شود و سود علی‌الحساب پرداخت می‌شود و در پایان سال مالی نیز مابه‌التفاوت سود تسویه می‌شود.

٤. **سپرده سرمایه‌گذاری وکالت در مشارکت:** برای این نوع از سپرده گواهی سپرده با سررسید معین در اختیار سپرده‌گذاران قرار داده می‌شود؛ این اوراق خاصیت انتقال‌پذیری دارند؛ یعنی می‌توانند در بازار ثانویه معامله شوند و با توجه به عمل‌کرد نهاد مشارکت بانک و سود مورد انتظار پروژه‌های نهاد مشارکت، سود اوراق خود را در هر لحظه دریافت نموده و اوراق را منتقل نمایند؛ به همین دلیل دیگر نیازی به پرداخت سود علی‌الحساب توسط بانک وجود ندارد.

۵. **سپرده سرمایه‌گذاری وکالت در مضاربه:** این نوع سپرده هم ویژگی‌های سپرده بالا را دارد با این تفاوت که منابع آن صرفاً در قالب عقد مضاربه در تجارت به کار می‌رود.
٦. **سپرده سرمایه‌گذاری وکالت عام:** بانک می‌تواند وجوه جمع‌آوری‌شده بر اساس این سپرده را در تمام عقود موجود در بخش سرمایه‌ای به کار گیرد. در پایان سال مالی بانک بر اساس میزان وجوه استفاده‌شده از این حساب در هر نهاد، سود ترکیبی این سپرده‌ها را مشخص نموده و به مشتریان پرداخت می‌نماید؛ بانک به صاحبان این سپرده‌ها سود علی‌الحساب پرداخت می‌نماید.

الگوی معرفی‌شده دارای سه تفاوت اساسی با الگوی کنونی بانکداری بدون ربای ایران است که به شرح زیر می‌باشد:

۱. در این الگو به منظور کنترل خلق پول و جلوگیری از اثرات مخرب آن بر اقتصاد، بر اساس الگوی بانکداری محدود سپرده جاری دارای ذخیره صد درصدی می‌باشد و بانک در مورد این وجوه هیچ‌گونه حق انتقال به غیر در قالب تسهیلات را ندارد؛ بنابراین در مدل ریاضی این بخش از سپرده در تابع درآمد بانک وارد نمی‌شود.
۲. برخلاف الگوی کنونی که سپرده پس‌انداز بر اساس عقد قرض می‌باشد، در الگوی مقاله این سپرده بر اساس عقد وکالت در قرض تعریف شده تا هم صد درصد این منابع در تسهیلات قرض مصرف شود و سنت حسنه قرض احیا شود و هم شبهه‌ای در مورد دریافت کارمزد بانک در اعطای تسهیلات قرض وجود نداشته باشد.
۳. در الگوی کنونی تمامی سپرده‌های سرمایه‌گذاری بر اساس عقد وکالت عام صورت می‌پذیرد؛ درصورتی‌که در الگوی مقاله به منظور پوشش همه سلیقه‌ها و فراهم‌نمودن شرایط متفاوت ریسک و بازدهی برای مشتریان، سپرده‌ها بر اساس عقد وکالت خاص (سپرده سرمایه‌گذاری وکالت در عقود با بازدهی ثابت، سپرده سرمایه‌گذاری وکالت در مشارکت، سپرده سرمایه‌گذاری وکالت در مضاربه و سپرده سرمایه‌گذاری وکالت عام) صورت می‌پذیرد که به‌کارگیری این سپرده‌ها در نهادهای تخصصی بانک و فقط در همان زمینه صورت می‌پذیرد و هر یک از این نهادها با عمل‌کرد مثبت خود و افزایش بازدهی سپرده‌ها می‌توانند سهم بیشتری از سپرده را به خود اختصاص دهند و کارمزد بیشتری بابت خدمات خود دریافت نمایند.

فرض سوم: درآمدهای بانک شامل درآمدهای کارمزدی و خدماتی در بخش پولی و حق‌الوکاله در بخش سرمایه‌ای است که به صورت رابطه هشت تعین می‌شود:

$$Total\ Income: y_s(t) + y_C(t) + r^{D_m}D_m(t) + r^{D_{if}}D_{if}(t) + r^{D_{iv}}D_{iv}(t) \qquad (۸)$$

که در آن y_s درآمد حاصل از ارائه خدمات بانکی، y_C درآمد ناشی از سرمایه بانک، D_m سپرده‌های اختصاص‌یافته در زمینه قرض، D_{if} سپرده‌های اختصاص‌یافته در زمینه عقود با بازدهی ثابت و D_{iv} سپرده‌های اختصاص‌یافته در زمینه عقود مشارکتی می‌باشد. همچنین r^{D_m} کارمزد ارائه خدمات قرض‌الحسنه، $r^{D_{if}}$ حق‌الوکاله به‌کارگیری سپرده‌ها در عقود با بازدهی ثابت و $r^{D_{iv}}$ حق‌الوکاله به‌کارگیری سپرده‌ها در عقود مشارکتی می‌باشد. ازآنجاکه بانک با استفاده از سرمایه خود در انواع مختلف سپرده‌گذاری ورود نموده و کسب سود می‌نماید، می‌توان درآمد حاصل از سرمایه بانک را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$y_C = \omega_1 {r^{D_m}}^2 D_m(t) + \omega_2 {r^{D_{if}}}^2 D_{if}(t) + \omega_3 {r^{D_{iv}}}^2 D_{iv}(t)$$

توان دوم کارمزد انواع مختلف سپرده در معادله فوق به این دلیل است که چون بانک به وسیله سرمایه خود به تناوب به سپرده‌گذاری و واگذاری آن اقدام می‌نماید، هر چقدر نرخ کارمزد بالاتر باشد، به تناسب آن سود بانک نیز افزایشی خواهد بود.

فرض چهارم: هزینه‌های بانک به دو بخش هزینه‌های خود بانک و هزینه‌های نهادهای زیرمجموعه بانک تقسیم می‌گردد؛ هزینه‌های خود بانک در زمان t دارای یک فرم درجه دو از میزان کل سپرده‌ها (سپرده‌های بخش پولی و بخش سرمایه‌ای بانک) بوده و هزینه نهادهای زیرمجموعه بانک هم به عنوان یک متغیر جدا در نظر گرفته می‌شود؛ در نتیجه هزینه بانک را می‌توان به صورت رابطه نه نشان داد:

$$Cost\ of\ the\ Bank(t) = a_0 + a_1 D(t) + a_2 D^2(t) + c_m D_m(t) + c_{if} D_{if}(t) + c_{iv} D_{iv}(t) \qquad (۹)$$

که در آن D مجموع کل سپرده‌های بانک، c_m هزینه نهایی تخصیص سپرده‌های قرض‌الحسنه، c_{if} هزینه نهایی تخصیص سپرده‌های عقود با بازدهی ثابت، c_{iv} هزینه نهایی

تخصیص سپرده‌های مشارکتی و $[a_0, a_1, a_2]$ بردار پارامترهای ساختار هزینه‌ای بانک می‌باشد. درنظرگرفتن فرم درجه دو به این دلیل است که به دلیل وجود صرفه به مقیاس، معمولاً برای فعالیت بانک هزینه‌های سخت‌افزاری و نرم‌افزاری یکسانی در ابتدا مورد نیاز است و بنابراین با افزایش میزان سپرده، هزینه نهایی شکل نزولی دارد؛ ولی از یک سطح مشخص به بعد، جذب سپرده، نیاز به هزینه‌های بیشتر به منظور ارتقای زیرساخت‌ها در بانک مانند افزایش تعداد شعب یا ارتقای نرم‌افزارهای مورد استفاده را دارد که این امر سبب می‌شود افزایش هزینه فزاینده باشد و هزینه نهایی صعودی شود. تفکیک هزینه‌های تخصیص سپرده‌ها نیز به این دلیل است که ساختار هزینه‌ای تخصیص انواع سپرده کاملاً متفاوت از یکدیگر است.

فرض پنجم: تابع هدف بانک مانند هر مؤسسه خصوصی دیگر حداکثرسازی ارزش فعلی خالص سود است که از تفاضل ارزش فعلی درآمد و هزینه بانک به دست می‌آید.

فرض ششم: با توجه به غیر متعین‌بودن سپرده‌گذاری در هر لحظه از زمان، تغییرات سپرده‌گذاری در هر یک از انواع سپرده، از یک فرایند تصادفی تبعیت می‌کند.

فرض هفتم: اگر $D_m(t)$ میزان سپرده پس‌انداز بر اساس عقد وکالت در قرض باشد، می‌توانیم تغییرات آن را به صورت زیر بیان نماییم:

$$dD_m(t)/D_m(t) = \mu_{D_m}(t)dt + \sigma_{D_m}(t)dw_{D_m}(t)$$

$dw_{D_m}(t)$ فرایند تصادفی براونی استاندارد سپرده پس‌انداز $D_m(t)$ می‌باشد؛ مقدار میانگین انتظاری سپرده پس‌انداز را برابر تفاوت بازدهی نهایی حاصل از به‌کارگیری این سپرده با نرخ کارمزد آن در نظر می‌گیریم و ازآنجاکه این نوع سپرده برای صاحبان آن بازدهی ندارد، لذا مقدار میانگین انتظاری را برابر $-r^{D_m}$ (هزینه نهایی به‌کارگیری سپرده پس‌انداز) در نظر می‌گیریم. با این توجیه که هر چقدر مقدار هزینه به‌کارگیری سپرده‌های وکالت در قرض کمتر باشد، در نتیجه کارمزد کمتری توسط بانک بر مصرف این نوع از سپرده‌ها وضع می‌شود و در نتیجه مقدار این نوع از سپرده تغییرات مثبتی را شامل خواهد شد؛ بنابراین می‌توانیم تغییرات $D_m(t)$ را به صورت رابطه ده بیان نماییم:

$$dD_m(t)/D_m(t) = -r^{D_m}dt + \sigma_{D_m}(t)dw_{D_m}(t) \qquad (۱۰)$$

فرض هشتم: اگر $D_{if}(t)$ میزان سپرده به‌کارگرفته‌شده بر اساس عقود با بازدهی ثابت باشد، می‌توانیم تغییرات آن را به صورت زیر بیان نماییم:

$$dD_{if}(t)/D_{if}(t) = \mu_{D_{if}}(t)dt + \sigma_{D_{if}}(t)dw_{D_{if}}(t)$$

$dw_{D_{if}}(t)$ فرایند تصادفی براونی استاندارد سپرده $\mathrm{D_{if}(t)}$ می‌باشد؛ همان‌گونه‌که در فرض قبل بیان شد مقدار میانگین انتظاری سپرده به‌کارگرفته‌شده بر اساس عقود با بازدهی ثابت را برابر تفاوت بازدهی نهایی حاصل از به‌کارگیری این سپرده با نرخ کارمزد آن در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه در الگوی پیشنهادی مقاله میزان بازدهی این نوع از سپرده در پایان دوره مشخص می‌شود، لذا در اینجا از بازدهی انتظاری این نوع از سپرده استفاده می‌نماییم و آن را با $\pi^e_{D_{if}}$ نشان می‌دهیم؛ بنابراین می‌توانیم تغییرات $D_{if}(t)$ را به صورت رابطه یازده بیان نماییم:

$$dD_{if}(t)/D_{if}(t) = \left(\pi^e_{D_{if}} - r^{D_{if}}\right) dt + \sigma_{D_{if}}(t)dw_{D_{if}}(t) \quad (۱۱)$$

فرض نهم: اگر $D_{iv}(t)$ میزان سپرده به‌کارگرفته‌شده بر اساس عقود مشارکتی باشد، می‌توانیم تغییرات آن را به صورت زیر بیان نماییم:

$$dD_{iv}(t)/D_{iv}(t) = \mu_{D_{iv}}(t)dt + \sigma_{D_{iv}}(t)dw_{D_{iv}}(t)$$

$dw_{D_{iv}}(t)$ فرایند تصادفی براونی استاندارد سپرده به‌کارگرفته‌شده بر اساس عقود مشارکتی $D_{iv}(t)$ می‌باشد؛ همانند فرض قبل مقدار میانگین انتظاری سپرده به‌کارگرفته‌شده بر اساس عقود مشارکتی را برابر تفاوت بازدهی نهایی حاصل از به‌کارگیری این سپرده با نرخ کارمزد آن در نظر می‌گیریم؛ در اینجا هم با توجه به اینکه در الگوی پیشنهادی مقاله میزان بازدهی این نوع از سپرده در پایان دوره مشخص می‌شود، از بازدهی انتظاری این نوع از سپرده استفاده می‌نماییم و آن را با $\pi^e_{D_{iv}}$ نشان می‌دهیم؛ بنابراین می‌توانیم تغییرات $D_{iv}(t)$ را به صورت رابطه دوازده بیان نماییم:

$$dD_{iv}(t)/D_{iv}(t) = \left(\pi^e_{D_{iv}} - r^{D_{iv}}\right)dt + \sigma_{D_{iv}}(t)dw_{D_{iv}}(t) \quad (۱۲)$$

فرض دهم: میان نوسانات سه نوع سپرده بالا یعنی $D_m(t)$، $D_{if}(t)$ و $D_{iv}(t)$ همبستگی وجود دارد؛ ولی تنها در زمان‌های یکسان، نه در زمان‌های متفاوت؛ به بیان دیگر

میان این سه نوع سپرده، همبستگی سریالی (serially correlation) وجود ندارد؛ اگر برای این سه نوع سپرده، بازارهای مختلفی در نظر بگیریم، این فرض با فرضیه عمومی کارایی بازار *فاما* (Fama) و *ساموئلسون* (Samuelson) سازگاری دارد (Merton, 1992, p.220).

فرض یازدهم: مجموع کل سپرده‌های بانک $D(t)$ تابعی از سه نوع سپرده بالا یعنی $D_m(t)$، $D_{if}(t)$ و $D_{iv}(t)$ است؛ به‌نحوی‌که در زمان t برای کل سپرده‌های بانک داریم:

$$D(t) = F\left(t, D_m(t), D_{if}(t), D_{iv}(t)\right) \quad (۱۳)$$

در نتیجه بر اساس دیفرانسیل‌گیری تصادفی کلی و قضیه ایتو (Tsay, 2002, Allen, 2007, p.95/p.228) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} dD(t) &= dF\left(t, D_m(t), D_{if}(t), D_{iv}(t)\right) \\ &= F_t dt + F_{D_m} dD_m + F_{D_{if}} dD_{if} + F_{D_{iv}} dD_{iv} + \frac{1}{2}\Big(F_{D_m D_m}(dD_m)^2 + \\ &\quad 2F_{D_m D_{if}} dD_m dD_{if} + 2F_{D_m D_{iv}} dD_m dD_{iv} + 2F_{D_{if} D_{iv}} dD_{iv} dD_{if} + \\ &\quad F_{D_{if} D_{if}}\left(dD_{if}\right)^2 + F_{D_{iv} D_{iv}}(dD_{iv})^2\Big) \end{aligned}$$

در نتیجه می‌توانیم فرم فرایند براونی کل سپرده‌ها $D(t)$ را به صورت رابطه چهارده بنویسیم:

$$\begin{aligned} dD(t) = D(t)\Big(&\mu_D(t)dt + \sigma_{DD_m}(t)dw_{D_m}(t) + \sigma_{DD_{if}}(t)dw_{D_{if}}(t) + \\ &\sigma_{DD_{iv}}(t)dw_{D_{iv}}(t)\Big) \end{aligned} \quad (۱٤)$$

در معادله دیفرانسیلی بالا ضرایب به صورت زیر تعریف می‌شوند (Hanson, 2007, p.304):

$$\begin{aligned} D(t)\mu_D(t) &= F_t + \mu_{D_m} D_m F_{D_m} + \mu_{D_{if}} D_{if} F_{D_{if}} + \mu_{D_{iv}} D_{iv} F_{D_{iv}} + \\ &\frac{1}{2}\Big(\sigma_{D_m}^2 {D_m}^2 F_{D_m D_m} + 2\rho_{D_m D_{if}}.\sigma_{D_m}\sigma_{D_{if}} D_m D_{if} F_{D_m D_{if}} + \\ &2\rho_{D_m D_{iv}}.\sigma_{D_m}\sigma_{D_{iv}} D_m D_{iv} F_{D_m D_{iv}} + 2\rho_{D_{iv} D_{if}}.\sigma_{D_{iv}}\sigma_{D_{if}} D_{iv} D_{if} F_{D_{if} D_{iv}} + \\ &\sigma_{D_{if}}^2 {D_{if}}^2 F_{D_{if} D_{if}} + \sigma_{D_{iv}}^2 {D_{iv}}^2 F_{D_{iv} D_{iv}}\Big) \end{aligned} \quad (۱٥)$$

$$D(t)\sigma_{DD_m}(t) = \sigma_{D_m} D_m F_{D_m} \quad (۱٦)$$

$$D(t)\sigma_{DD_{if}}(t) = \sigma_{D_{if}} D_{if} F_{D_{if}} \quad (۱۷)$$

$$D(t)\sigma_{DD_{iv}}(t) = \sigma_{D_{iv}} D_{iv} F_{D_{iv}} \tag{۱۸}$$

به این صورت که عبارت اول ضریب dt، عبارت دوم، سوم و چهارم هم به ترتیب ضریب dw_{D_m}، $dw_{D_{if}}$ و $dw_{D_{iv}}$ می‌باشند. به این ترتیب معادله دیفرانسیل تصادفی کل سپرده‌ها که مستخرج از سه معادله دیفرانسیل تصادفی انواع سپرده‌ها می‌باشد با ذکر جزئیات و ضرایب به دست آمد.

فرض دوازدهم: کل سپرده‌های بانک به صورت رابطه نوزده تعیین می‌شود:

$$D(t) = F\big(t, D_m(t), D_{if}(t), D_{iv}(t)\big) = D_m(t) + D_{if}(t) + D_{iv}(t) + D_c(t) \tag{۱۹}$$

که در آن D_c بیانگر سپرده‌های جاری می‌باشد. ازآنجاکه می‌توان این سپرده را بر اساس تفاضل کل سپرده‌ها با دیگر انواع سپرده‌ها نوشت، می‌توان به عنوان یک متغیر غیر مستقل آن را در محاسبات حذف نمود و به دلیل اینکه این نوع سپرده به‌طور مشخص و مستقیم در سودآوری بانک لحاظ نشده است و مهم‌ترین اثر این نوع سپرده حذف ذخیره قانونی از سایر سپرده‌ها می‌باشد، لذا در تابع هدف هم نیامده است.

در نتیجه اکنون می‌توانیم با استفاده از معادله شماره نوزده، معادله دیفرانسیل تصادفی شماره چهارده را بازنویسی نماییم. برای این منظور از معادلات پانزده تا هیجده هم استفاده شده است.

$$dD(t) = \left(\mu_{D_m} D_m + \mu_{D_{if}} D_{if} + \mu_{D_{iv}} D_{iv}\right) dt + \sigma_{D_m} D_m dw_{D_m}(t) + \sigma_{D_{if}} D_{if} dw_{D_{if}}(t) + \sigma_{D_{iv}} D_{iv} dw_{D_{iv}}(t)$$

با جایگزین‌کردن مقادیر میانگین انتظاری سپرده‌ها بر اساس فروض ششم تا هشتم می‌توانیم معادله نهایی دیفرانسیل تصادفی کل سپرده‌ها را به صورت رابطه بیست بیان نماییم:

$$dD(t) = \left(-r^{D_m} D_m(t) + \left(\pi^e_{D_{if}} - r^{D_{if}}\right) D_{if}(t) + \left(\pi^e_{D_{iv}} - r^{D_{iv}}\right) D_{iv}(t)\right) dt + \sigma_{D_m} D_m(t) dw_{D_m}(t) + \sigma_{D_{if}} D_{if}(t) dw_{D_{if}}(t) + \sigma_{D_{iv}} D_{iv}(t) dw_{D_{iv}}(t) \tag{۲۰}$$

فرض سیزدهم: رابطه انواع سپرده‌ها، سرمایه بانک و درآمد ناشی از ارائه خدمات بانک با کل سپرده‌های بانک به صورت زیر تعریف شده است:

$$D_m(t) = \alpha(t)\, D(t) \tag{۲۱}$$

$$D_{if}(t) = \lambda(t)\, D(t) \tag{۲۲}$$

$$D_{iv}(t) = \gamma(t)\, D(t) \tag{۲۳}$$

$$C(t) = \theta\, D(t) \tag{۲٤}$$

$$y_s(t) = \delta\, D(t) \tag{۲۵}$$

که در این روابط α، λ و γ به ترتیب سهم سپرده‌های وکالت در قرض، وکالت در عقود با بازدهی ثابت و وکالت در مشارکت از کل سپرده‌ها می‌باشند. θ نسبت نقدینگی بانک می‌باشد که با توجه به شرایط ویژه بانک مانند نوع مشتریان، ترکیب سپرده‌ها، شرایط اقتصادی جامعه و دیگر شاخص‌های تأثیرگذار در نقدینگی تعیین می‌گردد. در نهایت δ ضریب درآمدزایی خدماتی بانک می‌باشد. در اینجا فرض شده که درآمد ناشی از خدمات بانک با میزان کل سپرده‌های بانک ارتباط مستقیم دارد؛ منطق این فرض این است که با افزایش میزان سپرده‌های بانک، امکانات، تعداد شعب، کارکنان و خدمات‌دهی بانک نیز افزایش می‌یابد. δ می‌تواند از طریق تخمین رگرسیونی داده‌های بانک مشخص شود؛ البته ممکن است رابطه درآمد ناشی از خدمات بانک و سپرده‌ها از نوع درجه دوم یا لگاریتمی باشد که در اینجا برای سادگی رابطه خطی فرض شده است.

اکنون با توجه به معادلات شماره ۲۱ تا ۲۵ می‌توانیم معادلات نوزده و بیست را به صورت زیر بازنویسی نماییم:

$$D(t) = \alpha(t)\, D(t) + \lambda(t)\, D(t) + \gamma(t)\, D(t) + \big(1 - \alpha(t) - \lambda(t) - \gamma(t)\big) D(t) \tag{۲٦}$$

$$dD(t) = D(t)\left[\left(-\alpha r^{D_m} + \lambda\left(\pi^e_{D_{if}} - r^{D_{if}}\right) + \gamma\big(\pi^e_{D_{iv}} - r^{D_{iv}}\big)\right) dt + \alpha(t)\sigma_{D_m} dw_{D_m}(t) + \lambda(t)\sigma_{D_{if}} dw_{D_{if}}(t) + \gamma(t)\sigma_{D_{iv}} dw_{D_{iv}}(t)\right] \tag{۲۷}$$

تشکیل مسئله بهینه‌یابی پویای تصادفی تجهیز منابع

حال که مشخصات مدل پیشنهادی تبیین و فروض به‌کارگرفته‌شده در مدل تعریف شدند، می‌توانیم مسئله اصلی یعنی مدل بهینه‌یابی پویای تصادفی جهت الگوی پیشنهادی تجهیز منابع در بانکداری اسلامی را تبیین نماییم. همان‌گونه‌که در فرض پنجم ذکر شد، تابع هدف بانک مانند هر مؤسسه خصوصی دیگر حداکثرسازی ارزش فعلی خالص سود است که از تفاضل ارزش فعلی درآمد و هزینه بانک به دست می‌آید. این مسئله سه قید تصادفی دارد که شامل معادله دیفرانسیل تصادفی سه نوع سپرده یادشده در مدل یعنی $D_m(t)$، $D_{if}(t)$ و $D_{iv}(t)$ می‌باشد. مشابه همین کار توسط *مرتون* (۱۹۷۳) صورت پذیرفته است؛ به این صورت که *مرتون* در فصل هشتم کتاب خود با عنوان نظریه قیمت‌گذاری عقلایی اختیارات، تغییر در قیمت سهام، اوراق قرضه و اختیارات را به صورت یک معادله دیفرانسیل تصادفی بیان نموده که تغییرات قیمت اختیارات در آن، تابعی از تغییرات قیمت در سهام و اوراق قرضه می‌باشد. با این توضیحات می‌توانیم مسئله بهینه‌یابی پویای تصادفی مورد نظرمان را به صورت رابطه ۲۸ بیان نماییم:

$$Max\ \ Z\left(t, D_m(t), D_{if}(t), D_{iv}(t)\right) = E\left[\int_{t_0}^{T} e^{-\beta t}\left[y_s(t) + \omega_1 {r^{D_m}}^2 D_m(t) + \omega_2 {r^{D_{if}}}^2 D_{if}(t) + \omega_3 {r^{D_{iv}}}^2 D_{iv}(t) + r^{D_m} D_m(t) + r^{D_{if}} D_{if}(t) + r^{D_{iv}} D_{iv}(t) - \left(a_0 + a_1 D(t) + a_2 D^2(t) + c_m D_m(t) + c_{if} D_{if}(t) + c_{iv} D_{iv}(t)\ \right)\right] dt\right] \tag{۲۸}$$

$$s.t.\ \left\{\begin{array}{l} dD_m(t) = D_m(t)\left[\mu_{D_m}(t)dt + \sigma_{D_m}(t)dw_{D_m}(t)\right] \\ dD_{if}(t) = D_{if}(t)\left[\mu_{D_{if}}(t)dt + \sigma_{D_{if}}(t)dw_{D_{if}}(t)\right] \\ dD_{iv}(t) = D_{iv}(t)\left[\mu_{D_{iv}}(t)dt + \sigma_{D_{iv}}(t)dw_{D_{iv}}(t)\right] \end{array}\right\}$$

که در آن β نرخ تنزیل استفاده‌شده برای محاسبه ارزش حال سودهای آینده بانک است؛ نکته‌ای که وجود دارد این است که مسئله بهینه‌سازی تصادفی بالا دارای سه متغیر کنترل r^{D_m}، $r^{D_{if}}$ و $r^{D_{iv}}$ و سه متغیر وضعیت $D_m(t)$، $D_{if}(t)$ و $D_{iv}(t)$ می‌باشد که معادله دیفرانسیل تصادفی هر یک به عنوان یک قید تصادفی در مدل وارد شده است.

وجود چند متغیر کنترل خیلی مدل را پیچیده نخواهد کرد؛ ولی افزایش تعداد متغیرهای وضعیت کار را برای محاسبه و حل مدل بسیار سخت‌تر می‌نماید. در حالت عادی یعنی

یک مدل بهینه‌یابی تصادفی با یک متغیر وضعیت و یک متغیر کنترل، شاهد پیچیدگی‌های قابل توجه در محاسبات هستیم که در مسئله فوق این پیچیدگی‌ها چند برابر خواهد شد؛ چراکه ما درگیر مشتقات جزئی پیچیده‌تر و معادلات دیفرانسیل متعدد خواهیم بود که از قابلیت فهم مدل می‌کاهد؛ یکی از نوآوری‌های مهم پژوهش پیش رو، ساده‌کردن مدل با حفظ اطلاعات اصلی آن است؛ به این صورت که با تعریف یک تابع شامل سه متغیر وضعیت مسئله و با استفاده از اطلاعات موجود در این سه متغیر وضعیت، یک متغیر وضعیت کلی تعریف می‌نماییم که اطلاعات موجود در این سه متغیر وضعیت را در خود داشته باشد؛ در این صورت توانسته‌ایم با حفظ اطلاعات اصلی مسئله، آن را به یک مسئله ساده‌تر با یک متغیر وضعیت تبدیل نماییم. تعریف یک تابع که شامل همه متغیرهای وضعیت باشد و به‌دست‌آوردن دیفرانسیل تصادفی از این تابع به‌طور کامل و با ذکر جزئیات در فرض شماره یازده بیان شده است. در این فرض صورت کلی تابع و جزئیات به‌گونه‌ای بیان شده است که برای استفاده در مسائل دیگر نیز قابل استفاده باشد.

با توجه به ساده‌سازی‌های انجام‌گرفته بر اساس فروض نهم و یازدهم و استفاده از معادله شماره ۲۷ به عنوان قید مسئله می‌توانیم مسئله بهینه‌سازی تصادفی در معادله ۲۸ را به صورت رابطه ۲۹ بازنویسی نماییم:

$$\begin{aligned}
&Max\ \ Z\big(t,D(t)\big)=E\left[\int_{t_0}^{T}e^{-\beta t}\left[\left(\delta\ +\omega_1\alpha {r^{D_m}}^2+\omega_2\lambda {r^{D_{if}}}^2+\right.\right.\right.\\
&\left.\omega_3\gamma {r^{D_{iv}}}^2\ +\alpha r^{D_m}\ +\lambda r^{D_{if}}\ +\gamma r^{D_{iv}}\right)D(t)\ -\Big(a_0+a_1D(t)+\\
&\left.\left.a_2D^2(t)+c_m\alpha(t)D(t)+c_{if}\lambda(t)D(t)+c_{iv}\gamma(t)D(t)\Big)\right]dt\right]\\
&s.t.\ \left\{dD(t)=D(t)\left[\left(-\alpha r^{D_m}+\lambda\left(\pi_{D_{if}}^{e}-r^{D_{if}}\right)+\right.\right.\right.\\
&\left.\gamma\left(\pi_{D_{iv}}^{e}-r^{D_{iv}}\right)\right)dt+\alpha(t)\sigma_{D_m}dw_{D_m}(t)+\lambda(t)\sigma_{D_{if}}dw_{D_{if}}(t)+\\
&\left.\left.\gamma(t)\sigma_{D_{iv}}dw_{D_{iv}}(t)\right]\right\}
\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

بر خلاف رابطه ۲۸ که سه متغیر وضعیت داشتیم، در اینجا فقط یک متغیر وضعیت داریم که آن هم $D(t)$ یعنی کل سپرده‌های بانک می‌باشد. نکته دیگری که در این مسئله وجود دارد این است که در قید این مسئله معادله دیفرانسیل متغیر وضعیت متأثر از سه نوع فرایند تصادفی براونی می‌باشد که مربوط به سه نوع متفاوت از سپرده‌های بانک می‌باشد.

حل مسئله بهینه‌یابی پویای تصادفی تجهیز منابع

همان‌گونه‌که در مبانی نظری بیان شد، زمانی که مسئله بهینه‌یابی دارای قید به صورت معادله دیفرانسیلی باشد و این معادله شامل فرایند تصادفی براونی باشد، دیگر نمی‌توان این‌گونه مسائل را با استفاده از روش حساب تغییرات و اصل ماکزیمم حل نمود و باید از روش برنامه‌ریزی پویا استفاده کرد؛ بنابراین در اینجا هم چون مسئله نهایی بیان‌شده در معادله ۲۹ شامل قید تصادفی می‌باشد، باید از روش برنامه‌ریزی پویا که استفاده از معادله بلمن می‌باشد، استفاده نمود. نکته قابل توجه در مسئله نهایی مقاله که در معادله ۲۹ آمده است، وجود سه نوع فرایند تصادفی براونی در قید مسئله می‌باشد؛ در این حالت صورت کل مسئله به شکل رابطه زیر تغییر می‌یابد:

$$Max\ \ Z = E\left[\int_{t_0}^{T} I(t,x,u)dt + F(x(T),T)\right]$$
$$s.t. \qquad dx = f(t.x,u)dt + \sigma_1(t.x,u)dw_1 + \sigma_2(t.x,u)dw_2 + \sigma_3(t.x,u)dw_3 \qquad (۳۰)$$

اگر مسئله کلی بهینه‌یابی تصادفی به صورت بالا باشد، در معادله بلمن تغییر اساسی رخ خواهد داد. با توجه به اینکه این نوع مسئله و روش حل آن در کتاب‌های مرجع مسائل بهینه‌یابی تصادفی ذکر نگردیده است، نگارنده با رجوع به روش استخراج معادله بلمن و استفاده از اصل بهینگی، معادله بلمن متناسب با مسئله فوق را به صورت رابطه ۳۱ استخراج نموده است:

$$-z_t(t,x) = \underset{u}{Max}\left[I(t,x,u) + z_x(t,x)f(t.x,u) + \frac{1}{2}z_{XX}(t,x)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2\rho_{23}\sigma_2\sigma_3)\right] \qquad (۳۱)$$

که در آن ρ_{12} ، ρ_{13} و ρ_{23} ضریب همبستگی حرکت‌های براونی را با هم نشان می‌دهد؛ با مقایسه معادله ۳۰ با مسئله نهایی بیان‌شده در معادله ۲۹ خواهیم داشت:

$$f(t.x,u) = D(t)\left(-\alpha r^{D_m} + \lambda\left(\pi_{D_{if}}^{e} - r^{D_{if}}\right) + \gamma\left(\pi_{D_{iv}}^{e} - r^{D_{iv}}\right)\right)$$
$$\sigma_1(t.x,u) = \alpha(t)D(t)\sigma_{D_m}$$
$$\sigma_2(t.x,u) = \lambda(t)D(t)\sigma_{D_{if}}$$
$$\sigma_3(t.x,u) = \gamma(t)D(t)\sigma_{D_{iv}}$$

با قراردادن تابع اصلی و جایگزینی عبارات معادل $f(t.x,u)$، $\sigma_1(t.x,u)$، $\sigma_2(t.x,u)$ و $\sigma_3(t.x,u)$ در معادله بلمن یادشده در معادله ۳۱ به معادله بلمن متناسب با مسئله نهایی پژوهش دست خواهیم یافت که به صورت رابطه ۳۲ می‌باشد: (به منظور ساده‌ترشدن مدل، ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی برابر صفر در نظر گرفته شده است).

$$-z_t(t,D) = \underset{u}{Max}\left[e^{-\beta t}\left[D\left(\delta + \omega_1\alpha {r^{D_m}}^2 + \omega_2\lambda {r^{D_{if}}}^2 + \omega_3\gamma {r^{D_{iv}}}^2 + \alpha r^{D_m} + \lambda r^{D_{if}} + \gamma r^{D_{iv}}\right) - \left(a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + D\left(c_m\alpha + c_{if}\lambda + c_{iv}\gamma\right)\right)\right] + z_D(t,D).D\left(-\alpha r^{D_m} + \lambda\left(\pi^e_{D_{if}} - r^{D_{if}}\right) + \gamma\left(\pi^e_{D_{iv}} - r^{D_{iv}}\right)\right) + \frac{1}{2} z_{DD}(t,D).D^2\left(\alpha^2\sigma^2_{D_m} + \lambda^2\sigma^2_{D_{if}} + \gamma^2\sigma^2_{D_{iv}}\right)\right] \quad (۳۲)$$

برای حل معادله بالا می‌توان از روش‌های حل معادلات با مشتقات جزئی در حالت‌های خاص استفاده نمود (پورکاظمی، ۱۳۹۳، ص٤٤٦-٤٥٨). یک روش برای حل معادله فوق با توجه به صورت معادله، استفاده از روش ضرایب نامعین می‌باشد؛ در این روش حل نخست جواب را با ضرایب نامعین حدس زده و این جواب را با ضرایب نامعین در معادله برده و از اتحاد طرفین، ضرایب نامعین را تعیین می‌کنیم (همان، ٤٥٢).

درصورتی‌که بخواهیم مسئله نسبت به متغیرهای کنترل ماکزیمم باشد، باید از رابطه فوق نسبت به این متغیرها مشتق جزئی بگیریم؛ سپس برابر صفر قرار داده و مقادیر به‌دست‌آمده را در معادله ۲۵ جایگزین نماییم؛ با جایگزینی مقدار بهینه متغیرهای کنترل در معادله بلمن شماره ۳۲ و حل این معادله با استفاده از روش ضرایب نامعین، مقادیر نهایی و بهینه متغیرهای کنترل به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$ {r^{D_m}}^* = \frac{A_1+2A_2D-1}{2\omega_1} \quad (۳۳)$$

$$ {r^{D_{if}}}^* = \frac{A_1+2A_2D-1}{2\omega_2} \quad (۳٤)$$

$$ {r^{D_{iv}}}^* = \frac{A_1+2A_2D-1}{2\omega_3} \quad (۳۵)$$

با جایگذاری مقادیر بهینه به‌دست‌آمده برای متغیرهای کنترل در این معادله، به معادله حرکتی دست می‌یابیم که متغیرهای کنترل در آن بهینه می‌باشند و به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{dD(t)}{D(t)} = \left(\frac{-\alpha(A_1+2A_2D-1)}{2\omega_1} + \lambda\left(\pi^e_{D_{if}} - \frac{A_1+2A_2D-1}{2\omega_2}\right) + \gamma\left(\pi^e_{D_{iv}} - \frac{A_1+2A_2D-1}{2\omega_3}\right)\right)dt + \alpha\sigma_{D_m}dw_{D_m}(t) + \lambda\sigma_{D_{if}}dw_{D_{if}}(t) + \gamma\sigma_{D_{iv}}dw_{D_{iv}}(t) \quad (٣٦)$$

سرانجام با استفاده از فرمول ایتو می‌توانیم مقدار بهینه متغیر وضعیت یعنی $D(t)$ را در هر لحظه از زمان به دست آوریم (Hanson, 2007, p.250). نکته‌ای که در مورد معادله حرکت این مسئله وجود دارد این است که این معادله به جای یک نوع حرکت براونی شامل سه نوع حرکت براونی می‌باشد؛ بنابراین باید فرمول ایتو را برای این نوع از معادله حرکت، دوباره استخراج نمود. در بیشتر کتاب‌های مرجع فرمول مشخص و دقیقی برای این موارد ذکر نشده و صرفاً به بیان صورت‌برداری اکتفا نموده‌اند (Tsay, 2002, p.242)؛ به همین جهت با محاسبات نگارنده این فرمول به صورت زیر به دست آمده است:

$$dY = \left(F_t + F_x\alpha + \frac{1}{2}F_{xx}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2]\right)dt + F_x[\sigma_1 dw_1 + \sigma_2 dw_2 + \sigma_3 dw_3] \quad (٣٧)$$

بر این اساس اگر طبق معادله شماره بیست، صورت کلی معادله حرکت به صورت زیر باشد:

$$\frac{dD}{D} = \left[\alpha dt + \sigma_1 dw_{D_m} + \sigma_2 dw_{D_{if}} + \sigma_3 dw_{D_{iv}}\right]$$

با تعریف $Y = F(t,x) = lnD$ و تشکیل فرمول ایتو طبق معادله ۳۲ بر اساس این تابع، جواب معادله دیفرانسیل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$dlnD = \left(0 + \frac{1}{D}\alpha D + \frac{-1}{2D^2}[\sigma_1^2D^2 + \sigma_2^2D^2 + \sigma_3^2D^2]\right)dt + \frac{1}{D}\left[\sigma_1 Ddw_{D_m} + \sigma_2 Ddw_{D_{if}} + \sigma_3 Ddw_{D_{iv}}\right]$$

$$\Rightarrow dlnD = \left(\alpha - \frac{1}{2}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2]\right)dt + \left[\sigma_1 dw_{D_m} + \sigma_2 dw_{D_{if}} + \sigma_3 dw_{D_{iv}}\right]$$

$$\Rightarrow lnD = lnD_0 + \left(\alpha - \frac{1}{2}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2]\right)t + \sigma_1 w_{D_m} + \sigma_2 w_{D_{if}} + \sigma_3 w_{D_{iv}}$$

$$\Rightarrow D^{*} = D_0 e^{\left(\alpha-\frac{1}{2}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2]\right)t+\sigma_1 w_{D_m}+\sigma_2 w_{D_{if}}+\sigma_3 w_{D_{iv}}} \quad (۳۸)$$

در مرحله آخر با جایگذاری مقادیر معادل α، σ_1، σ_2 و σ_3 به‌دست‌آمده از معادله حرکت ۳٦ می‌توانیم به مسیر بهینه متغیر وضعیت مسئله یعنی مقدار سپرده بانک دست یابیم.

$$\alpha = \left(\frac{-\alpha(A_1+2A_2D-1)}{2\omega_1} + \lambda\left(\pi^e_{D_{if}} - \frac{A_1+2A_2D-1}{2\omega_2}\right) + \gamma\left(\pi^e_{D_{iv}} - \frac{A_1+2A_2D-1}{2\omega_3}\right)\right)$$
$$\sigma_1 = \alpha\sigma_{D_m}$$
$$\sigma_2 = \lambda\sigma_{D_{if}}$$
$$\sigma_3 = \gamma\sigma_{D_{iv}}$$

به منظور به‌دست‌آوردن مسیر زمانی بهینه D^* به صورت عددی می‌توان از روش شبیه‌سازی اولر ـ مارویاما استفاده نمود؛ به این صورت که اگر صورت کلی معادله دیفرانسیل تصادفی به شکل زیر را در نظر بگیریم:

$$dx = \alpha(t.x)dt + \sigma(t.x)dw$$

فرایند تصادفی وینر w_t با استفاده از مجموعه‌ای تجمعی تغییرات افزایشی که از توزیع نرمال تولید می‌شوند، ایجاد می‌شود. با توجه به اینکه تغییرات افزایشی فرایند x از زمان k تا زمان $k+1$ یعنی Δx_k را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \alpha(t_k.x_k)\Delta t + \sigma(t_k.x_k)\Delta w_k$$

که در آن $\Delta P_k = P(t_{k+1}) - P(t_k)$، $\Delta w_k = w(t_{k+1}) - w(t_k)$ و Δt یک بازه زمانی کوچک است. به این ترتیب برای شبیه‌سازی فرایند $\mathrm{x_t}$، مقادیر $\Delta \mathrm{w_k}$ را از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس Δt با استفاده از اعداد تصادفی از توزیع نرمال استاندارد بر اساس رابطه $\Delta w_k = \sqrt{\Delta t} \times N(0,1)$ شبیه‌سازی می‌نماییم؛ بدین‌ترتیب اگر مقدار فرایند x در زمان t_0 را داشته باشیم، مقدار فرایند در زمان $k+1$ برای $k = 1{:}N$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(t_k.x_k)\Delta t + \sigma(t_k.x_k)\Delta w_k$$

که در آن $t_{k+1} = k\Delta t$ می‌باشد؛ بنابراین با انجام این فرایند شبیه‌سازی به مسیر فرایند x_t بر بازه زمانی مورد علاقه می‌رسیم (Hanson, 2007, p.253؛ به نقل از کیایی و دیگران، ۱۳۹۲، ص۱۳۰).

تعیین و تحلیل میزان بهینه سهم هر یک از انواع سپرده

برای تعیین سهم بهینه هر یک از انواع سپرده باید از رابطه ۳۲ (معادله بلمن به‌دست‌آمده از مسئله نهایی مقاله) نسبت به هر یک از این سهم‌ها مشتق گرفته و مقدار به‌دست‌آمده را برابر صفر قرار دهیم؛ به این ترتیب مقدار بهینه سهم هر یک از انواع سپرده به صورت زیر خواهد بود:

$$\alpha^* = \frac{e^{-\beta t}\left(\omega_1 {r^{Dm}}^2 + r^{Dm} - c_m\right) - r^{Dm}.z_D}{z_{DD}.D\sigma_{D_m}^2} \quad (۳۹)$$

$$\lambda^* = \frac{e^{-\beta t}\left(\omega_2 {r^{D_{if}}}^2 + r^{D_{if}} - c_{if}\right) + \left(\pi_{D_{if}}^e - r^{D_{if}}\right).z_D}{z_{DD}.D\sigma_{D_{if}}^2} \quad (۴۰)$$

$$\gamma^* = \frac{e^{-\beta t}\left(\omega_3 {r^{D_{iv}}}^2 + r^{D_{iv}} - c_{iv}\right) + \left(\pi_{D_{iv}}^e - r^{D_{iv}}\right).z_D}{z_{DD}.D\sigma_{D_{iv}}^2} \quad (۴۱)$$

همان‌گونه‌که در روابط بالا مشخص است، سهم هر یک از انواع سپرده با افزایش هزینه نهایی به‌کارگیری سپرده کاهش می‌یابد؛ بنابراین در صورت کاهش هزینه به‌کارگیری هر یک از انواع سپرده، سهم آن سپرده نیز افزایش خواهد یافت؛ از سوی دیگر هر چقدر نوسانات مربوط به هر یک از انواع سپرده (σ) کمتر باشد، سهم آن سپرده نیز افزایش می‌یابد؛ در نتیجه ثبات و عدم نوسان شدید در یک نوع از سپرده، اثر مثبت در میزان سهم آن سپرده خواهد داشت. عامل دیگری که سبب افزایش سهم یک نوع از سپرده می‌شود، افزایش بازدهی به‌کارگیری آن سپرده می‌باشد؛ به این معنی که اگر مثلاً نهاد مربوط به عقد مشارکت، با مدیریت صحیح و انتخاب طرح‌های پربازده و کم‌ریسک بتواند بازدهی سپرده‌های مشارکتی را بالا ببرد، این امر سپرده‌گذاران را ترغیب به افزایش سپرده مشارکتی نموده و سهم این نوع سپرده افزایش می‌یابد. اثر نرخ کارمزد هر نوع از سپرده بر میزان سهم آن نوع از سپرده مشخص نمی‌باشد؛ چراکه در روابط بالا هم به صورت مثبت و هم به صورت منفی وجود دارد؛ با افزایش کارمزد به‌کارگیری هر نوع از سپرده از سویی انگیزه

سپرده‌گذارن کاهش و از سوی دیگر انگیزه نهاد مربوط به آن نوع از سپرده را افزایش می‌دهد و ازآنجاکه سود بانک در به‌کارگیری آن نوع از سپرده افزایش می‌یابد، طبیعتاً سپرده‌های با وکالت عام خود را به آن نوع خاص از سپرده اختصاص می‌دهد.

مقایسه مدل مقاله با مدل مبتنی بر بهره

برای مقایسه مدل مقاله پیش رو با مدل مبتنی بر بهره در این قسمت از مدل بیان‌شده در مقاله *کیایی* و همکاران (۱۳۹۲) استفاده می‌نماییم. *کیایی* در مقاله خود مدل بهینه‌یابی تصادفی پویا برای یک بانک مبتنی بر بهره را به صورت زیر مدل‌سازی نموده است:

$$\max_{D_t} \ V(t, L_t) = \int_0^T e^{-\beta t} (r^L L_t + r^T T_t - r^D D_t - (a_0 + a_1 D_t + a_2 D_t^2 + b_1 L_t + b_2 L_t^2))dt$$

$$s.t. \ \ dL_t = (C_t + D_t - T_t - R_t)dt + \sigma_t L_t dW_t P_t$$

که در آن درآمدهای بانک شامل درآمد بهره‌ای اعطای وام $(r^L L_t)$ و درآمد ناشی از اوراق $(r^T T_t)$ می‌باشد و هزینه‌های آن شامل هزینه بهره‌ای سپرده $(r^D D_t)$ و هزینه عملیاتی بانک می‌باشد. ساختار مدل مبتنی بر بهره بسیار ساده و بسیط می‌باشد. بانک از سویی سپرده می‌پذیرد و درصد ثابتی بابت آن بهره می‌پردازد و از سوی دیگر با صرف این سپرده‌ها در اعطای وام و خرید اوراق درآمد مشخص و ثابتی به دست می‌آورد که سود بانک از مابه‌التفاوت آنها به دست می‌آید. با مقایسه این مدل با مدل ارائه‌شده مقاله در رابطه ۲۸ تفاوت‌های زیر قابل بیان است:

- در مدل مقاله سود به‌دست‌آمده از فعالیت بانک برخلاف نظام مبتنی بر بهره، متعلق به صاحبان سپرده بوده نه بانک؛ به همین جهت، حداکثرنمودن میزان حق‌الوکاله و کارمزد خدمات بانک، به عنوان تابع هدف در نظر گرفته می‌شود که این امر منجر به نتایج مثبتی مانند افزایش انگیزه سپرده‌گذاری، بهبود توزیع سود و ریسک میان مشتری و بانک و ایجاد رقابت میان بانک‌ها می‌شود؛ بنابراین در الگوی اسلامی مقاله منافع صاحبان سپرده بیشتر تأمین می‌شود.
- بر خلاف مدل مبتنی بر بهره در جهت برآورده‌نمودن همه سلایق در سپرده‌گذاری، انواع مختلف سپرده با بازدهی و ریسک متفاوت (قرض، وکالت در عقود با بازدهی ثابت و عقود با بازدهی متغیر) در مدل مقاله در نظر گرفته شده است که هر یک از آنها

دارای نرخ حق‌الوکاله مخصوص به خود می‌باشند و در رابطه با بازدهی عمل‌کرد بانک می‌باشد. بانک می‌تواند در عقود با بازدهی متغیر با افزایش بازدهی خود، حق‌الوکاله بیشتری دریافت و سود خود را حداکثر نماید. این تنوع در سپرده‌گذاری سبب تخصصی‌شدن فعالیت بانک و افزایش بازدهی سپرده‌ها می‌شود و ارتباط بانک با بخش واقعی اقتصاد پررنگ‌تر می‌شود.

- در مدل مبتنی بر بهره، بانک از طریق افزایش نرخ سود تسهیلات، سود خود را حداکثر می‌نماید؛ درحالی‌که در مدل مقاله بانک به منظور حداکثرنمودن سود خود باید عمل‌کرد خود در بخش واقعی اقتصاد را بهبود ببخشد تا با افزایش بازدهی و کاهش هزینه بتواند سود بیشتری نصیب صاحبان سپرده نماید و از این طریق با افزایش رغبت سپرده‌گذاران قادر به جذب سپرده بیشتری شده و پیرو آن کارمزد و حق‌الوکاله بیشتری دریافت نماید و سود خود را حداکثر نماید.

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش با تشکیل مسئله بهینه‌یابی تجهیز منابع بر اساس الگوی پیشنهادی و حل آن با استفاده از معادله بلمن استخراج‌شده توسط نگارنده و تعیین مسیر بهینه متغیرهای کنترل و وضعیت با استفاده از مدل بهینه‌یابی پویای تصادفی، مدل‌سازی شدند که البته با توجه به تعداد متغیرهای کنترل و وضعیت در این مدل، نیاز به تعریف توابع میانی و مشتقات جزئی متعدد بود که انجام شد و نتیجه نهایی به دست آمد.

یکی از نوآوری‌های پژوهش پیش رو در مدل‌سازی ریاضی بانکداری اسلامی، عدم اکتفا به الگوی رایج بانکداری بدون ربا می‌باشد. ازآنجاکه الگوی کنونی بانکداری بدون ربا از جهات مختلف ـ نظری و عملی ـ دارای مشکلات متعددی می‌باشد، بنابراین لازم است در وهله نخست با معرفی یک الگوی جایگزین این مشکلات برطرف شده باشد، سپس این الگوی جایگزین مدل‌سازی شود؛ به این ترتیب توانسته‌ایم الگویی را مدل‌سازی ریاضی نماییم که در واقعیت اقتصاد قابلیت اجرا داشته باشد و امیدوار باشیم کارایی آن به مراتب از الگوی فعلی بیشتر است.

در مدل معرفی‌شده پارامترهای متعددی وجود دارد که برای تعیین مسیر بهینه متغیرهای کنترل و وضعیت باید مقادیر عددی آنها استخراج گردند. ازآنجاکه الگوی ارائه‌شده برای تجهیز منابع یک الگوی کاملاً جدید و متفاوت با الگوهای در حال اجرا می‌باشد، پس نمی‌توان بر اساس یک الگوی عملی اجراشده مقادیر این پارامترها را به دست آورد. إن‌شاءالله با اقبال مسئولان و دست‌اندرکاران از این الگو و اجرای عملی آن، بتوان مقادیر واقعی این پارامترها را استخراج و مسیر بهینه متغیرهای کنترل و وضعیت را تعیین نمود.

با تعیین مقادیر بهینه نرخ کارمزد و حق‌الوکاله، بانک می‌تواند در هر لحظه از زمان نسبت به اصلاح قراردادهای خود در جهت اعمال این نرخ‌های بهینه اقدام نموده و سود خود را حداکثر نماید؛ از سوی دیگر با تعیین مقادیر بهینه سه متغیر $\alpha(t)$، $\lambda(t)$ و $\gamma(t)$ به عنوان سهم هر یک از انواع سپرده، بانک می‌تواند با مقایسه این سهم‌های بهینه با مقادیر واقعی، مسیر حرکت خود در جهت رسیدن به سهم‌های بهینه را تغییر دهد. بانک با استفاده از ابزار در اختیار خود مانند تبلیغات و سپرده‌های وکالت عام می‌تواند این سهم‌ها را تغییر داده و مستقیماً میزان سودآوری خود را تغییر دهد.

در الگوی ارائه‌شده، بانک مانند هر مؤسسه مالی دیگر حداکثرکننده سود می‌باشد و مسیر بهینه متغیرهای کنترل و وضعیت نیز طوری استخراج شده‌اند که بانک را به حداکثر سود برسانند. با تعیین مسیر بهینه سپرده‌های بانک با استفاده از روابط ۲۱، ۲۲ و ۲۳ می‌توان مسیر بهینه هر یک از انواع سپرده‌ها را نیز استخراج نمود و با مقایسه این مقادیر با مقدار واقعی هر یک از این سپرده‌ها در عمل، مسیر حرکت خود را به سمت مقدار بهینه در جهت حداکثرنمودن سودآوری بانک تغییر داد.

یکی دیگر از ویژگی‌های مهم الگوی ارائه‌شده در مقاله بسیط و قابل اجرابودن این الگو در عمل می‌باشد؛ در واقع الگوی پژوهش به‌گونه‌ای طراحی شده است که تا اندازه‌ای هم پاسخگوی نیازهای واقعی جامعه باشد و هم تطابق صد در صدی با شرع داشته باشد و در عین حال به نظر می‌رسد نیازی به صوری‌سازی و استفاده از حیله‌های شرعی برای اجرای آن نباشد؛ چراکه نیازهای واقعی مشتریان در قالب‌های تأییدشده شرعی در این الگو برآورده می‌شود و در عمل نیازی به صوری‌سازی نمی‌باشد. درآمد اصلی بانک در این الگو از دریافت کارمزد و حق‌الوکاله به دست می‌آید که از قبل مشخص و شفاف می‌باشد؛ در

واقع در قرارداد میان مشتری و بانک، همه چیز از قبل مشخص و شفاف می‌باشد و بانک خود را درگیر تعهدات اضافه ننموده و طبق شرایط اقتصاد کلان جامعه و وضع بازار، میزان سود سپرده‌گذاران تعیین و به آنها پرداخت می‌شود. در این مدل انگیزه بانک برای کسب سودآوری بیشتر و ارائه سود بالاتر به مشتریان، کسب عمل‌کرد بهتر نسبت به رقبا و جذب مشتریان بیشتر می‌باشد؛ چراکه با افزایش مقدار سپرده‌های بانک، طبیعتاً میزان کارمزد و حق‌الوکاله بیشتری نصیب بانک شده و میزان سودآوری بانک را افزایش می‌دهد؛ به همین دلیل که بانک در یک شرایط رقابتی و بر اساس واقعیت‌های اقتصادی جامعه اقدام به فعالیت می‌کند، این الگو می‌تواند در کشورهای غیر اسلامی نیز اجرا و با آنها رقابت نماید.

در پایان خاطرنشان می‌شود که این الگو و بیان آن با استفاده از دقیق‌ترین و جدیدترین ابزار ریاضی یک نقطه شروع در این زمینه می‌باشد و بی‌گمان با ورود دیگر پژوهشگران به این عرصه، این الگو جرح و تعدیل شده و ایرادات احتمالی آن مشخص و رفع می‌شود و سرانجام می‌تواند به عنوان الگویی جدید و مترقی مورد استفاده نظام بانکی کشور عزیزمان قرار گیرد و به عنوان نمادی از تمدن غنی ایرانی اسلامی فراروی دیگر کشورها قرار گرفته و مورد الگوبردای آنها قرار گیرد.

منابع و مآخذ

۱. اینتریلیگیتور، ام.دی.؛ **اصول بهینه‌یابی پویا**؛ ترجمه محمدحسین پورکاظمی؛ چ۲، تهران: انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۸۷.

۲. پورکاظمی، محمدحسین؛ **بهینه‌سازی پویا، کنترل بهینه و کاربردهای آن**، چ۱، تهران: انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۹۳.

۳. چیانگ، آلفا.سی.؛ **اصول بهینه‌یابی پویا**؛ ترجمه عباس شاکری و فریدون اهرابی؛ چ۱، تهران: انتشارات دانشگاه علامه طباطبایی، ۱۳۸۷.

٤. داوودی، پرویز و محمد بیدار؛ «بررسی الگوی تفکیک عقود در بانکداری اسلامی»؛ **دوفصلنامه معرفت اقتصاد اسلامی**، س۳، ش۵، ۱۳۹۰.

۵. داوودی، پرویز و محمدجواد محققنیا؛ «بانکداری محدود»؛ **دوفصلنامه علمی- پژوهشی جستارهای اقتصادی**، س۵، ش۱۰، ۱۳۸۷.

٦. داودی، پرویز و حسین صمصامی؛ **اقتصاد پول و بانکداری**؛ تهران: دانشگاه شهید بهشتی، ١٣٨٧.

٧. کیایی، حسن و دیگران؛ «مقایسه عمل‌کرد بهینه در بانکداری اسلامی و بانکداری متعارف: استفاده از فرایند تصادفی پرش ـ انتشار»؛ **دوفصلنامه علمی پژوهشی مطالعات اقتصاد اسلامی**، س٦، ش١١، ١٣٩٢.

٨. محقق‌نیا، محمدجواد؛ **الگوی بانکداری اسلامی**؛ قم: مرکز بین‌المللی ترجمه و نشر المصطفی ﷺ، ١٣٩٣.

٩. __________؛ **ساختار بانکداری اسلامی و ارائه الگویی برای بانکداری اسلامی در ایران**؛ چ١، تهران: انتشارات دانشگاه علامه طباطبایی، ١٣٩٢.

١٠. موسویان، سیدعباس و دیگران؛ «تعیین سهم بهینه عقدهای مبادله‌ای و مشارکتی در بانکداری بدون ربا»؛ **فصلنامه اقتصاد اسلامی**، س١٤، ش٥٣، ١٣٩٣.

١١. میرجلیلی، سیدحسین؛ «الگویی برای سازماندهی مجدد نظام بانکی»؛ **فصلنامه نامه مفید**، ش٤٢، ١٣٨٣.

12. A Ahmad, Ausaf; "Structure of deposits in selected Islamic banks: implication for deposit mobilization, Islamic Research and Training Institute"; **Islamic Development Bank**, Jeddah, Saudi Arabia, 1997.

13. Allen, E.; **Modeling with Ito stochastic differential equations**; University of Texas, USA, published by springer, p.o. Box 17 , 3300 AA, 2007.

14. Bertsekas, Dimitri P.; **Dynamic Programing and Optimal Control**; volume 2, Athena Scientific, third edition, 2003.

15. Black F., Scholes M.J.; "The Pricing of Options and Corporate Liabilities"; **Journal of Political Economy**, Vol.81, No. 3, pp. 637-654, May - June 1973.

16. Bossone, Biagio.; "Should Banks Be Narrowed?"; **Working Paper**, No. 354, 2002.

17. Floyd B. Hanson; **Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis and Computation**; University of Illinois, Chicago, USA, 2007.
18. Khan, M. S.; "Islamic Interest-Free Banking"; **IMF Staff Papers**, 1986.
19. Khan, Mohsin. S & Mirakhor, Abbas; "The Framework and Practice of Islamic Banking in Theoretical Studied in Islamic Banking and Finance"; edited by Mohsin S Khan. & Abbas Mirakhor (USA), **the institute for research and Islamic studies**, 1987.
20. Merton, R. C., & Samuelson, P. A; **Continuous-time finance**; 1992.
21. Mukuddem-Petersen J., Petersen M. A.; "Bank Management via Stochastic Optimal Control"; **Automatica**, vol. 42, No. 8, pp. 1395-1406, 2006.
22. R. C. Merton; **Theory of Rational Option Pricing**; Bell J. Econ. Mgmt. Sci.,vol. 4, 1973 (Spring), pp. 141-183. (Reprinted in Merton [203, Chapter 8].), 1973.
23. Sigauke, C., Maposa, D., & Chagwiza, W.; "Modelling Commercial Banks Liquidity Management Using Stochastic Programming"; **International Journal of Business and Management**, 7(9), 49, 2012.
24. Tsay, R. S.; "Analysis of Financial Time Series"; University of Chicago, **the wiley-interscience publication**, 2002.